1[ères] Maths DS 1 Samedi 18 novembre 2023 Durée 1h30

Calculatrice autorisée en **mode examen** **Total sur 20 points**

Exercice 1 [5 points]

Pour tout réel x on pose : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 31x + 12$.

Partie A

1. Déterminer les racines de : $-x^2 + 7x - 12$.

2. Dresser le tableau de signes de : $-x^2 + 7x - 12$.

Partie B

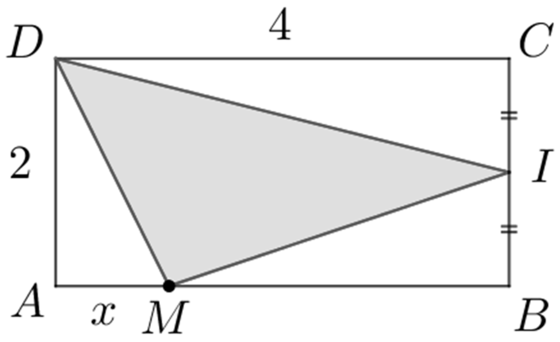
1. En présentant le détail des calculs, montrer que $\frac{1}{2}$ est une racine de f.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = (2x-1)(ax^2 + bx + c)$.

3. Résoudre $f(x) < 0$.

Exercice 2 [8 points]

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$, I le milieu de $[BC]$.
Pour tout point M du segment $[AB]$ on note x la distance AM et on pose $f(x) = DM^2 + MI^2$:



1. Démontrer que, pour tout $x \in [0; 4]$ on a : $f(x) = 2x^2 - 8x + 21$.

2. a. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 4]$.

b. Quelle est la valeur minimale de $DM^2 + MI^2$?
Préciser alors la position du point M.

c. Quelle est la valeur maximale de $DM^2 + MI^2$?
Préciser alors la ou les position(s) du point M.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle DMI est-il rectangle en M ?

Exercice 3 [2 points]
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x.$$

2. Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 2\cos^2 x - 1$$

Exercice 4 [5 points]

1. Par définition, le nombre d'or φ est la solution positive de l'équation :

$$x^2 = x + 1.$$

Déterminer la valeur exacte du nombre d'or.

2. On admet que cos $\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est égal à la moitié du nombre d'or et que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est strictement positif, en déduire que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

3. En citant les formules utilisées, donner les valeurs exactes du cosinus de chacun des nombres suivants :

$$a = -\frac{\pi}{5} \qquad b = \frac{4\pi}{5} \qquad c = \frac{3\pi}{10}$$

Corrigé thiaude

Exercice 1

Pour tout réel x on pose : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 31x + 12$.

Partie A

1. Déterminer les racines de : $-x^2 + 7x - 12$.

$-x^2 + 7x - 12$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 7$ et $c = -12$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(-1)(-12) = 49 - 48 = 1$.
$\Delta > 0$ donc $-x^2 + 7x - 12$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-\sqrt{1}}{2(-1)} = \frac{-7-1}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+\sqrt{1}}{2(-1)} = \frac{-7+1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

L'expression $-x^2 + 7x - 12$ admet pour racines 2 et 3.

2. Dresser le tableau de signes de : $-x^2 + 7x - 12$.

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».
On obtient finalement :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$-x^2 + 7x - 12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

1. En présentant le détail des calculs, montrer que $\frac{1}{2}$ est une racine de f.

Pour tout réel x, on a : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 31x + 12$, donc :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 31\left(\frac{1}{2}\right) + 12 = -2 \times \frac{1}{8} + 15 \times \frac{1}{4} - \frac{31}{2} + 12$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{15}{4} - \frac{62}{4} + \frac{48}{4} = \frac{-1+15-62+48}{4} = \frac{63-63}{4} = 0$$

On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ce qui montre que $\frac{1}{2}$ est une racine de f.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = (2x-1)(ax^2 + bx + c)$.

Il s'agit de déterminer a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2x^3 + 15x^2 - 31x + 12 = (2x-1)(ax^2 + bx + c)$$

Le terme de plus haut degré de l'expression membre de droite est $2ax^2$, celui du membre de gauche est $-2x^3$ donc $a = -1$.
Le terme constant de l'expression membre de droite est $(-c)$, celui du membre de gauche est 12 donc $c = -12$.
Le terme en x^2 du membre de droite est $(2b - a)x^2$ c'est-à-dire $(2b+1)x^2$, celui du membre de gauche est 15 donc : $2b + 1 = 15$ qui donne $2b = 14$ puis $b = 7$.
On a donc : $a = -1$, $b = 7$et $c = -12$ par conséquent :$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x-1)(-x^2 + 7x - 12)$

3. Résoudre $f(x) < 0$.

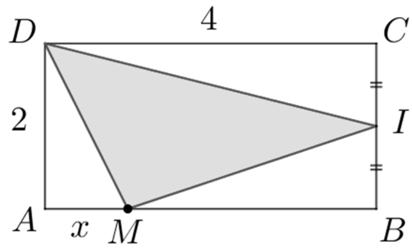
Dressons le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		4		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x^2 + 7x - 12$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On souhaite que $f(x) < 0$ c'est-à-dire que $f(x)$ soit strictement négatif.
La dernière ligne du tableau de signes donne : $S = \left]\frac{1}{2}\,;3\right[\cup]4;+\infty[$.

Exercice 2

$f(x) = DM^2 + MI^2$



1. Démontrer que, pour tout $x \in [0;4]$:.

Le triangle ADM est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit que : $DM^2 = DA^2 + AM^2$, or $DA = 2$ et $AM = x$ donc $DM^2 = 2^2 + x^2 = x^2 + 4$.

Le triangle BIM est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit que :

$$MI^2 = MB^2 + BI^2 = (4-x)^2 + 1^2 = 16 - 8x + x^2 + 1 = x^2 - 8x + 17$$

Pour tout $x \in [0;4]$, on a : $f(x) = DM^2 + MI^2 = x^2 + 4 + x^2 - 8x + 17 = 2x^2 - 8x + 21$

On a donc bien : pour tout $x \in [0;4]$, $f(x) = 2x^2 - 8x + 21$.

2. a. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;4]$.

$\forall x \in [0;4], f(x) = 2x^2 - 8x + 21$

$2x^2 - 8x + 21$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = -8$ et $c = 21$.

On a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(2)} = +\frac{8}{4} = 2$$

$$\beta = f(\alpha) = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 21 = 2 \times 4 - 16 + 21 = 8 - 16 + 21 = 13$$

$a = 2$, $a > 0$ donc : $f \searrow$ sur $[0;\alpha]$ i.e. sur $[0;2]$ et $f \nearrow$ sur $[\alpha;4]$ i.e ; $[2;4]$.

$f(0) = 2(0)^2 - 8(0) + 21 = 21$ et $f(4) = 2(4)^2 - 8(4) + 21 = 32 - 32 + 21 = 21$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0		$\alpha = 2$		4
Sens de variation de f	21	$\searrow$	$\beta = 13$	$\nearrow$	21

b. Quelle est la valeur minimale de $DM^2 + MI^2$? Préciser alors la position du point M.

D'après le tableau de variation la valeur minimale de $f(x)$ est 13, atteinte pour $x = 2$ (uniquement) donc lorsque M est le milieu de $[AB]$.

c. Quelle est la valeur maximale de $DM^2 + MI^2$? Préciser alors la ou les position(s) du point M.

D'après le tableau de variation la valeur maximale de $f(x)$ est 21, atteinte pour $x = 0$ et pour $x = 4$ donc lorsque $M = A$ ou $M = B$.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle DMI est rectangle en M ?

Le triangle CDI est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit que :

$DI^2 = DC^2 + CI^2$, or $DC = 4$ et $CI = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ donc $DI^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$.

On a les équivalences suivantes :

DMI est rectangle en $M \Leftrightarrow DM^2 + MI^2 = DC^2$ $(Pythagore) \Leftrightarrow f(x) = 17 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 21 = 17$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 21 - 17 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$x^2 - 4x + 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 2$, de discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(2) = 16 - 8 = 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\Delta > 0$ donc $2x^2 - 8x + 21$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 - 2\sqrt{2}}{2(1)} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{2(1)} = 2 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 + 2\sqrt{2}}{2(1)} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2(1)} = 2 + \sqrt{2}$$

Le triangle DMI est rectangle en M lorsque $x \in \{2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\}$.

Exercice 3 [2 points]

1. **Démontrer que pour tout réel x, on a : $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$.**

   rappel : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

   « de l'un des membres vers l'autre ».

$$
\begin{aligned}
&(\sin x+\cos x)^2\\
&=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\\
&=\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x\\
&=1+2\sin x\cos x
\end{aligned}
$$

   On a donc bien : $\forall x\in\mathbb{R},(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$.

   Autre méthode

$$
\begin{aligned}
&1+2\sin x\cos x\\
&=\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x\\
&=\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x\\
&=(\cos x)^2+2(\cos x)(\sin x)+(\sin x)^2\\
&=(\cos x+\sin x)^2
\end{aligned}
$$

   On a donc bien : On a donc bien : $\forall x\in\mathbb{R},(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$.

2. Démontrer que pour tout réel x, on a : $(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=2\cos^2 x-1$.

$$
\begin{aligned}
&(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)\\
&=\cos^2 x-\sin^2 x\\
&=\cos^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x\\
&=2\cos^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)\\
&=2\cos^2 x-1
\end{aligned}
$$

   Autre méthode

$$
\begin{aligned}
&(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)\\
&=\cos^2 x-\sin^2 x\\
&=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)\\
&=\cos^2 x-1+\cos^2 x\\
&=2\cos^2 x-1
\end{aligned}
$$

   À retenir

   $\cos^2 x$ peut être remplacé par $1-\sin^2 x$

   $\sin^2 x$ peut être remplacé par $1-\cos^2 x$

   On a donc bien : $\forall x\in\mathbb{R},(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=2\cos^2 x-1$

   Autre méthode

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2 x-1\\
&=2\cos^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)\\
&=2\cos^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x\\
&=\cos^2 x-\sin^2 x\\
&=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)
\end{aligned}
$$

   On a donc bien : $\forall x\in\mathbb{R},(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=2\cos^2 x-1$

Exercice 4

1. **Par définition, le nombre d'or φ est la solution positive de l'équation : $x^2=x+1$. Déterminer la valeur exacte du nombre d'or.**

   L'équation $x^2=x+1$ s'écrit aussi $x^2-x-1=0$.

   x^2-x-1 est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1,b=-1$ et $c=-1$, de discriminant :

$$\Delta=ba-4ac=(-1)^2-4(1)(-1)=1+4=5$$

   $\Delta>0$ donc x^2-x-1 admet deux racines réelles distintes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+1-\sqrt{5}}{2(1)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Le nombre d'or est strictement positif, or $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. On admet que cos $\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est égal à la moitié du nombre d'or et que sin $\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, en déduire que :

$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

On a :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16} = 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{16}$$

$$= 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} = \frac{16}{16} - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

Or $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$ donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = +\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

On a donc bien :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

3. En citant les formules utilisées, les valeurs exactes du cosinus de chacun des nombres suivants :

$$\boldsymbol{a = -\frac{\pi}{5} \qquad b = \frac{4\pi}{5} \qquad c = \frac{3\pi}{10}}$$

Pour a on utilise la formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.

$$\cos(a) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Pour b on utilise la formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

$$\cos(b) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Pour c on utilise la formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

$$\cos(c) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$